

© 2025 г. Я.Г. САПУНКОВ, канд. физ.-мат. наук (iptmuran@san.ru),  
А.В. МОЛОДЕНКОВ, д-р техн. наук (molalexei@yandex.ru)  
(Институт проблем точной механики и управления РАН, Саратов)

## КВАЗИОПТИМАЛЬНОЕ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ УГЛОВОЕ УСКОРЕНИЕ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА, ПОЛУЧЕННОЕ НА ОСНОВЕ КОНЦЕПЦИИ ПУАНСО

Рассматривается кинематическая задача поиска оптимального по быстродействию программного углового ускорения космического аппарата как твердого тела при произвольных граничных условиях по угловому положению и угловой скорости космического аппарата. Соответственно классической концепции Пуансо об угловом движении твердого тела как обобщенном коническом движении и на основе принципа максимума Понтрягина получено квазиоптимальное аналитическое решение задачи, которое доведено до алгоритма. Приводятся подтверждающие аналитические и числовые примеры, показывающие в зависимости от граничных условий либо близость квазиоптимального решения к оптимальному решению, либо их полное совпадение.

*Ключевые слова:* оптимальное и квазиоптимальное управление, космический аппарат, твердое тело, угловое ускорение, концепция Пуансо, аналитическое решение, алгоритм.

DOI: 10.31857/S0005231025030035, EDN: IEOIHR

### 1. Введение

При решении многих задач наведения и управления космическими аппаратами требуется знать оптимальное в том или ином смысле программное угловое ускорение космического аппарата (КА) при произвольных заданных граничных условиях [1–5]. Как правило, в литературе такое ускорение ищется либо численно, либо строится аналитически (например, [5]) на основе полиномов (сплайнов) посредством представления кватерниона ориентации КА полиномами и выражения вектора угловой скорости через этот кватернион. Однако никаких гарантий (доказанных теорем или соображений из теоретической механики), что на всей совокупности угловых движений КА, при любых граничных условиях эти аналитические решения будут достаточно хорошо аппроксимировать оптимальную траекторию углового движения КА, не приводится.

В статье исследуется кинематическая задача поиска оптимального по быстродействию программного углового ускорения КА при произвольных

граничных условиях по угловому положению и угловой скорости КА. Получить оптимальное аналитическое решение этой задачи при произвольных граничных условиях затруднительно, так как точное решение задачи нахождения ориентации твердого тела по его известной угловой скорости (задачи Дарбу) в общем случае не известно [6, 7]. Соответственно классической концепции Пуансо об угловом движении твердого тела как обобщенном коническом движении задача поиска оптимального углового ускорения КА переформулирована в этом классе движений. Траектория КА задана явными выражениями, которые содержат произвольные кватернионные и скалярные постоянные и две произвольные скалярные функции, которые являются параметрами обобщенного конического движения. Применительно к этим параметрам и их производным ставится и решается оптимизационная задача, в которой в качестве управлений выступают вторые производные от этих параметров. При этом общность исходной задачи практически не нарушается, так как известное точное решение классической задачи поиска оптимального углового ускорения в случае плоского поворота КА [4] или в новом частном случае регулярной прецессии, который приводится в статье, и аналогичные решения задачи в рамках рассматриваемой концепции полностью совпадают; в других случаях в числовых расчетах решения исходной задачи и предлагаемого аналитического решения относительная погрешность между значениями функционала оптимизации, который является определяющей характеристикой задачи, составляет не более одного процента, включая повороты КА на большие углы. Поэтому предлагаемое аналитическое решение задачи может трактоваться как квазиоптимальное по отношению к классической задаче поиска оптимального углового ускорения КА. Приведены явные выражения для кватерниона ориентации и вектора угловой скорости КА, посредством дифференцирования выражения вектора угловой скорости получена явная формула углового ускорения КА; записан аналитический алгоритм решения задачи, который может быть использован на борту КА.

Предлагаемый в статье аналитический метод решения ранее был успешно применен в динамических задачах оптимальных разворотов КА различных конфигураций с различными критериями оптимизации [8, 9].

## 2. Постановка классической задачи

Угловое движение КА как твердого тела вокруг центра масс описывается системой дифференциальных уравнений в векторно-матричной форме:

$$(2.1) \quad 2 \begin{bmatrix} \dot{\lambda}_0 \\ \dot{\lambda}_1 \\ \dot{\lambda}_2 \\ \dot{\lambda}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda_1 & -\lambda_2 & -\lambda_3 \\ \lambda_0 & -\lambda_3 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_0 & -\lambda_1 \\ -\lambda_2 & \lambda_1 & -\lambda_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix},$$

$$(2.2) \quad [\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3]^T = [\varepsilon_1 \ \varepsilon_2 \ \varepsilon_3]^T,$$

которой эквивалентна краткая запись [4]:

$$(2.3) \quad 2\dot{\mathbf{\Lambda}} = \mathbf{\Lambda} \circ \boldsymbol{\omega},$$

$$(2.4) \quad \dot{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\varepsilon},$$

где  $\mathbf{\Lambda} = [\lambda_0(t), \lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t)]^T$  или  $\lambda_0(t) + \lambda_1(t)i_1 + \lambda_2(t)i_2 + \lambda_3(t)i_3$  – нормированный кватернион, описывающий угловое положение КА ( $\|\mathbf{\Lambda}\| = \lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1$ );  $\boldsymbol{\omega} = [\omega_1(t), \omega_2(t), \omega_3(t)]^T$  или  $\boldsymbol{\omega}(t) = \omega_1(t)\mathbf{i}_1 + \omega_2(t)\mathbf{i}_2 + \omega_3(t)\mathbf{i}_3$  – вектор его угловой скорости, который может рассматриваться как кватернион с нулевой скалярной частью  $\boldsymbol{\omega} = [0, \omega_1(t), \omega_2(t), \omega_3(t)]^T$ ;  $\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t), \varepsilon_3(t)]^T$  – вектор углового ускорения КА; мнимые единицы Гамильтона  $i_1, i_2, i_3$  соответствуют ортам трехмерного векторного пространства  $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ , символ « $\circ$ » означает произведение кватернионов; « $T$ » – знак транспонирования векторов. Соответственно, фазовые координаты  $\mathbf{\Lambda}, \boldsymbol{\omega}$  положены непрерывными функциями, а угловое ускорение  $\boldsymbol{\varepsilon}$  (рассматриваемое как управление) – кусочно-непрерывной функцией [10].

Вектор углового ускорения ограничен по модулю:

$$(2.5) \quad |\boldsymbol{\varepsilon}| \leq \varepsilon_{\max}.$$

Краевые условия по ориентации и угловой скорости КА произвольны и заданы:

$$(2.6) \quad \mathbf{\Lambda}(0) = \mathbf{\Lambda}_0, \quad \mathbf{\Lambda}(T) = \mathbf{\Lambda}_T,$$

$$(2.7) \quad \boldsymbol{\omega}(0) = \boldsymbol{\omega}_0, \quad \boldsymbol{\omega}(T) = \boldsymbol{\omega}_T.$$

Необходимо найти оптимальное управление  $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{опт}}(t)$ , доставляющее минимум функционалу

$$(2.8) \quad J = T.$$

Постановка задачи (2.1)–(2.8) является кинематической, так как не учитывает динамическую конфигурацию КА. Следует отметить, что оптимальное угловое ускорение КА можно искать как производную от оптимальной угловой скорости КА и в полной динамической задаче оптимального разворота КА, где вместо векторного уравнения (2.4) используются динамические уравнения Эйлера, а функцией управления является приложенный к КА вектор внешнего управляющего момента [8, 9].

### 3. Безразмерные переменные

Переформулируем задачу, заменяя исходные размерные переменные на безразмерные:

$$t^{\text{безраз}} = t\varepsilon_{\max}^{1/2}, \quad \boldsymbol{\omega}^{\text{безраз}} = \boldsymbol{\omega}\varepsilon_{\max}^{1/2}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{безраз}} = \boldsymbol{\varepsilon}\varepsilon_{\max}^{1/2}.$$

при этом все выражения, кроме ограничения на модуль вектора углового ускорения

$$(3.1) \quad |\varepsilon| \leq 1,$$

не изменятся. Ниже будем решать задачу (2.3), (2.4), (2.6)–(2.8), (3.1) в безразмерных переменных, где верхние индексы в постановке задачи убраны.

#### 4. Применение принципа максимума

Применяя принцип максимума Понтрягина [4, 10], введем сопряженные переменные  $\Psi(t)$ ,  $\varphi(t)$  – кватернион и вектор соответственно, сопряженные к фазовым переменным. Функция Гамильтона–Понтрягина есть

$$(4.1) \quad H = (\Psi, \Lambda \circ \omega) / 2 + (\varphi, \varepsilon),$$

где  $\langle (\cdot, \cdot) \rangle$  обозначает скалярное произведение векторов.

Сопряженная система уравнений имеет вид

$$(4.2) \quad \begin{cases} 2\dot{\Psi} = \Psi \circ \omega, \\ \dot{\varphi} = -\text{vect}(\tilde{\Lambda} \circ \Psi) / 2, \end{cases}$$

где  $\langle \text{vect}(\cdot) \rangle$  – векторная часть кватерниона, а символ  $\langle \tilde{\cdot} \rangle$  означает сопряжение кватерниона. Линейные дифференциальные системы уравнений для переменных  $\Psi$  и  $\Lambda$  совпадают, следовательно, их решения различаются на кватернионную константу  $\mathbf{C}$ :

$$(4.3) \quad \Psi = \mathbf{C} \circ \Lambda.$$

Условие трансверсальности [10] в момент времени  $t = T$ :

$$(4.4) \quad \text{scal}(\Psi(T) \circ \tilde{\Lambda}(T)) = 0,$$

где  $\langle \text{scal}(\cdot) \rangle$  – скалярная часть кватерниона. Выражение  $\text{scal}(\Psi \circ \tilde{\Lambda})$  является первым интегралом для системы уравнений (4.2), отсюда и соответственно (4.4)

$$(4.5) \quad \text{scal}(\Psi(t) \circ \tilde{\Lambda}(t)) \equiv 0.$$

Из (4.3), (4.5)  $\text{scal } \mathbf{C} = 0$  и  $\mathbf{C} = \mathbf{c}_v$ , где  $\mathbf{c}_v$  – постоянный вектор. При этом равенство (4.3) примет вид

$$(4.6) \quad \Psi = \mathbf{c}_v \circ \Lambda.$$

Если ввести обозначение [4]

$$(4.7) \quad \mathbf{p} = \text{vect}(\tilde{\Lambda} \circ \Psi) = \tilde{\Lambda} \circ \mathbf{c}_v \circ \Lambda,$$

система уравнений (4.2) будет выглядеть так:

$$(4.8) \quad \begin{cases} \mathbf{p} = \tilde{\Lambda} \circ \mathbf{c}_v \circ \Lambda, \\ \dot{\varphi} = -\mathbf{p}/2. \end{cases}$$

Таким образом, в силу самосопряженности линейной дифференциальной системы уравнений (2.1) ((2.3)) размерность краевой задачи принципа максимума понижается на четыре [4].

Условие максимума функции Гамильтона–Понтрягина (4.1) на ограниченном и замкнутом множестве (3.1) дает следующую структуру оптимального управления:

$$(4.9) \quad \epsilon^{\text{опт}} = \varphi/|\varphi|.$$

Следует отметить, что случай особого управления  $\varphi \equiv 0$  нарушает требование условия принципа максимума о существовании нетривиальных сопряженных переменных  $\varphi$ ,  $\Psi$  [10], так как из формул (4.8) следует, что  $\mathbf{p} \equiv 0$ ,  $\mathbf{c}_v \equiv 0$  и из (4.6) –  $\Psi \equiv 0$ .

Соответственно (2.3), (2.4), (4.8), (4.9) получим:

$$(4.10) \quad \dot{\mathbf{p}} = [\mathbf{p}, \boldsymbol{\omega}],$$

$$(4.11) \quad \mathbf{p} = -2|\varphi| \frac{d^2 \boldsymbol{\omega}}{dt^2} - 2 \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \frac{d|\varphi|}{dt},$$

где « $[\cdot, \cdot]$ » обозначает векторное произведение векторов.

Подставим выражение (4.11) в уравнение (4.10) и получим

$$(4.12) \quad \frac{d^3 \boldsymbol{\omega}}{dt^3} = \left[ \frac{d^2 \boldsymbol{\omega}}{dt^2}, \boldsymbol{\omega} \right] + \frac{1}{|\varphi|} \left( \frac{d|\varphi|}{dt} \left( \left[ \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}, \boldsymbol{\omega} \right] - 2 \frac{d^2 \boldsymbol{\omega}}{dt^2} \right) - \frac{d^2 |\varphi|}{dt^2} \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \right).$$

Оптимальная угловая скорость КА на всем интервале времени движения удовлетворяет векторному дифференциальному уравнению третьего порядка (4.12) (ранее подобный факт был установлен для особых режимов управления в задаче оптимальной переориентации сферически-симметричного КА [11]). На основе (4.7) функция Гамильтона–Понтрягина (4.1) примет вид:

$$(4.13) \quad H = (\mathbf{p}, \boldsymbol{\omega}) / 2 + (\varphi, \epsilon).$$

## 5. Точное решение задачи поиска оптимального углового ускорения КА в частном случае

Представим новое частное решение задачи поиска оптимального по быстродействию ускорения КА в классе регулярных конических движений, для

этого модуль вектора  $\varphi$  положим постоянным на всем интервале времени движения

$$(5.1) \quad |\varphi| = c.$$

В этом случае сопряженные переменные  $\mathbf{p}$ ,  $\varphi$  и управление  $\varepsilon$  выражаются через вектор угловой скорости по формулам

$$(5.2) \quad \varphi = c\dot{\omega}, \quad \mathbf{p} = -2c\dot{\omega}, \quad \varepsilon = \dot{\omega},$$

а сам вектор угловой скорости удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(5.3) \quad \ddot{\omega} = [\ddot{\omega}, \omega].$$

Тем самым задача оптимального управления (2.3), (2.4), (2.6)–(2.8), (3.1) сводится к краевой задаче (2.3), (5.3), (2.6), (2.7). Не нарушая общности, константу  $c$  можно положить равной 1.

Оптимальная угловая скорость КА в классе регулярных конических движений имеет вид

$$(5.4) \quad \omega = \tilde{\mathbf{K}} \circ (\mathbf{i}_1 \alpha \sin \Omega t + \mathbf{i}_2 \alpha \cos \Omega t + \mathbf{i}_3 \Omega) \circ \mathbf{K},$$

где  $\mathbf{K}$  (кватернион),  $\alpha$ ,  $\Omega$  – произвольные постоянные; при этом

$$(5.5) \quad \|\mathbf{K}\| = K_0^2 + K_1^2 + K_2^2 + K_3^2 = 1.$$

Кватернион  $\mathbf{K}$  отвечает за поворот вектора, стоящего в круглой скобке в формуле (5.4), вокруг некоторой постоянной оси, проходящей через неподвижную точку КА. Покажем, что угловая скорость (5.4) удовлетворяет уравнению (5.3). Для этого последовательно дифференцируем формулу (5.4) три раза по переменной  $t$ :  $\dot{\omega} = \alpha \Omega \tilde{\mathbf{K}} \circ (\mathbf{i}_1 \cos \Omega t - \mathbf{i}_2 \sin \Omega t) \circ \mathbf{K}$ ,  $\ddot{\omega} = -\alpha \Omega^2 \tilde{\mathbf{K}} \circ (\mathbf{i}_1 \sin \Omega t + \mathbf{i}_2 \cos \Omega t) \circ \mathbf{K}$ ,  $\ddot{\omega} = \alpha \Omega^3 \tilde{\mathbf{K}} \circ (-\mathbf{i}_1 \cos \Omega t + \mathbf{i}_2 \sin \Omega t) \circ \mathbf{K}$ . Подставляя (5.4) и полученные выражения производных в (5.3), можно убедиться в выполнении равенства, при этом  $\ddot{\omega} = [\ddot{\omega}, \omega] = (\ddot{\omega} \circ \omega - \omega \circ \ddot{\omega})/2$ .

Траектория движения КА при угловой скорости (5.4) из (2.3), (2.6) находится явно и имеет вид регулярной прецессии

$$(5.6) \quad \Lambda(t) = \Lambda_0 \circ \tilde{\mathbf{K}} \circ \exp\{\mathbf{i}_2 \alpha t/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_3 \Omega t/2\} \circ \mathbf{K},$$

где « $\exp\{\cdot\}$ » обозначает экспоненциальную функцию с кватернионным показателем [4].

В выражения (5.4)–(5.6) входят пять произвольных постоянных  $\alpha$ ,  $\Omega$ ,  $K_i$ ,  $i = 0, 1, 2$  (константа  $K_3$  связана с условием (5.5)). Ограничение на модуль вектора углового ускорения  $\varepsilon$  (3.1) выполняется при условии

$$(5.7) \quad \alpha^2 \Omega^2 = 1.$$

Удовлетворим краевые условия (2.6), (2.7). Из-за недостаточного количества произвольных констант в (5.4) на величины  $|\boldsymbol{\omega}_0|$  и  $\boldsymbol{\omega}_T$  наложим требования по ходу решения задачи, при этом единичный вектор  $\boldsymbol{\omega}_0^e = \boldsymbol{\omega}_0/|\boldsymbol{\omega}_0|$  произволен и задан. В точке  $t = 0$  по формуле (5.4):

$$(5.8) \quad \boldsymbol{\omega}_0 = |\boldsymbol{\omega}_0| \boldsymbol{\omega}_0^e = \tilde{\mathbf{K}} \circ (\mathbf{i}_2\alpha + \mathbf{i}_3\Omega) \circ \mathbf{K},$$

$$(5.9) \quad \|\boldsymbol{\omega}_0\| = \left\| \tilde{\mathbf{K}} \circ (\mathbf{i}_2\alpha + \mathbf{i}_3\Omega) \circ \mathbf{K} \right\| = \left\| \tilde{\mathbf{K}} \right\| \|\mathbf{i}_2\alpha + \mathbf{i}_3\Omega\| \|\mathbf{K}\| = \alpha^2 + \Omega^2,$$

на правом конце траектории КА при  $t = T$  из (2.6) и (5.6) имеем

$$(5.10) \quad \boldsymbol{\Lambda}_T = \boldsymbol{\Lambda}_0 \circ \tilde{\mathbf{K}} \circ \exp\{\mathbf{i}_2\alpha T/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_3\Omega T/2\} \circ \mathbf{K},$$

при этом

$$(5.11) \quad \text{scal}(\tilde{\boldsymbol{\Lambda}}_0 \circ \boldsymbol{\Lambda}_T) = \text{scal}(\exp\{\mathbf{i}_2\alpha T/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_3\Omega T/2\}).$$

По формулам (5.5), (5.7)–(5.10) определим величины  $T$ ,  $|\boldsymbol{\omega}_0|$ ,  $\alpha$ ,  $\Omega$ ,  $\mathbf{K}$ . Представим (5.8), (5.10) в виде

$$\begin{aligned} (\mathbf{i}_2\alpha + \mathbf{i}_3\Omega) \circ \mathbf{K} - \mathbf{K} \circ \boldsymbol{\omega}_0 &= 0, \\ \exp\{\mathbf{i}_2\alpha/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_3\Omega/2\} \circ \mathbf{K} - \mathbf{K} \circ \tilde{\boldsymbol{\Lambda}}_0 \circ \boldsymbol{\Lambda}_T &= 0, \end{aligned}$$

или та же запись на основе  $m$ - и  $n$ - матриц, изоморфных кватернионам [12]:

$$(5.12) \quad \left( \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\alpha & -\Omega \\ 0 & 0 & -\Omega & \alpha \\ \alpha & \Omega & 0 & 0 \\ \Omega & -\alpha & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{01} & -\omega_{02} & -\omega_{03} \\ \omega_{01} & 0 & \omega_{03} & -\omega_{02} \\ \omega_{02} & -\omega_{03} & 0 & \omega_{01} \\ \omega_{03} & \omega_{02} & -\omega_{01} & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} K_0 \\ K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$(5.13) \quad \left( \begin{bmatrix} m_0 & -m_1 & -m_2 & -m_3 \\ m_1 & m_0 & -m_3 & m_2 \\ m_2 & m_3 & m_0 & -m_1 \\ m_3 & -m_2 & m_1 & m_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} n_0 & -n_1 & -n_2 & -n_3 \\ n_1 & n_0 & n_3 & -n_2 \\ n_2 & -n_3 & n_0 & n_1 \\ n_3 & n_2 & -n_1 & n_0 \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} K_0 \\ K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

где матрица коэффициентов линейной алгебраической системы (5.13) определяется компонентами кватернионов  $\mathbf{m}$  и  $\mathbf{n}$ :

$$(5.14) \quad \begin{cases} \mathbf{m} = \exp\{\mathbf{i}_2\alpha/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_3\Omega/2\}, \\ m_0 = \cos(\alpha/2) \cos(\Omega/2), \quad m_1 = \sin(\alpha/2) \sin(\Omega/2), \\ m_2 = \sin(\alpha/2) \cos(\Omega/2), \quad m_3 = \cos(\alpha/2) \sin(\Omega/2), \end{cases}$$

$$(5.15) \quad \mathbf{n} = \tilde{\boldsymbol{\Lambda}}_0 \circ \boldsymbol{\Lambda}_T,$$

нормы которых равны  $\|\mathbf{m}\| = 1$ ,  $\|\mathbf{n}\| = 1$ ; при этом ранги матриц коэффициентов систем (5.12), (5.13) равны 2. Выбирая в (5.12), (5.13) по два линейно

независимых уравнения, получим однородную систему

$$(5.16) \quad \begin{bmatrix} 0 & \omega_{01} & \omega_{02} - \alpha & \omega_{03} - \Omega \\ -\omega_{01} & 0 & -(\omega_{03} + \Omega) & \omega_{02} + \alpha \\ m_1 - n_1 & 0 & -(m_3 + n_3) & m_2 + n_2 \\ 0 & n_1 - m_1 & n_2 - m_2 & n_3 - m_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} K_0 \\ K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Для существования нетривиальных решений определитель матрицы коэффициентов системы (5.16) должен быть равен 0. Исходя из этого и учитывая (5.8), (5.9), (5.14), (5.15), получим

$$(5.17) \quad |\omega_0| = (m_2\alpha + m_3\Omega)/(n_1\omega_{01}^e + n_2\omega_{02}^e + n_3\omega_{03}^e).$$

Из (5.7)–(5.9), (5.11), (5.17) получим систему трех уравнений для нахождения  $\alpha$ ,  $\Omega$ ,  $T$ :

$$(5.18) \quad \begin{cases} \alpha^2\Omega^2 - 1 = 0, \\ (\alpha^2 + \Omega^2)(n_1\omega_{01}^e + n_2\omega_{02}^e + n_3\omega_{03}^e)^2 - (m_2\alpha + m_3\Omega)^2 = 0, \\ \text{scal}(\tilde{\mathbf{A}}_0 \circ \mathbf{A}_T) - \cos(\alpha T/2) \cos(\Omega T/2) = 0. \end{cases}$$

Компоненты кватерниона  $\mathbf{K}$  определяются по формулам:

$$(5.19) \quad \begin{aligned} K_3 &= \pm \left[ 1 + (A_0/D)^2 + (A_1/D)^2 + (A_2/D)^2 \right]^{-1/2}, & K_0 &= A_0 K_3 / D, \\ K_1 &= A_1 K_3 / D, & K_2 &= A_2 K_3 / D, \end{aligned}$$

где

$$(5.20) \quad \begin{cases} A_0 = -(m_2 + n_2)(\omega_{03} + \Omega) + (m_3 + n_3)(\omega_{02} + \alpha), \\ A_1 = (m_1 - n_1)\omega_{01} + (m_3 + n_3)(\Omega - \omega_{03}) + (m_2 + n_2)(\alpha - \omega_{02}), \\ A_2 = (m_1 - n_1)(\omega_{02} + \alpha) + (m_2 + n_2)\omega_{01}, \\ D = (m_1 - n_1)(\omega_{03} + \Omega) + (m_3 + n_3)\omega_{01}. \end{cases}$$

Краевое условие по угловой скорости КА при  $t = T$  должно выглядеть так:

$$(5.21) \quad \omega(T) = \omega_T = \tilde{\mathbf{K}} \circ (\mathbf{i}_1 \alpha \sin \Omega T + \mathbf{i}_2 \alpha \cos \Omega T + \mathbf{i}_3 \Omega) \circ \mathbf{K}.$$

В итоге, если краевые условия по угловой скорости КА  $\omega$  удовлетворяют требованиям (5.17), (5.21), траектория углового движения КА находится в классе регулярных конических движений и определяется явными выражениями (5.4), (5.6) ( $\omega(t) \forall t \in [0, T]$ ) принадлежит конической поверхности, которая определяется в пространстве произвольными заданными граничными условиями по положению  $\mathbf{A}_0$ ,  $\mathbf{A}_T$  и произвольным заданным направлением вектора своего начального значения  $\omega_0^e$ .

Оптимальное угловое ускорение из (2.4), (5.4) будет

$$(5.22) \quad \varepsilon = \dot{\omega} = \alpha \Omega \tilde{\mathbf{K}} \circ (\mathbf{i}_1 \cos \Omega t - \mathbf{i}_2 \sin \Omega t) \circ \mathbf{K},$$

$$(5.23) \quad |\varepsilon|^2 = \alpha^2 \Omega^2 = 1,$$

тем самым ограничение на модуль вектора управления (3.1) выполнено.



Сопряженные переменные  $\varphi$  и  $\mathbf{p}$  находятся из выражений (5.2). Задача при введенных ограничениях полностью решена.

Запишем алгоритм решения задачи поиска оптимального углового ускорения КА в классе регулярных конических движений:

1) с использованием известных величин  $\Lambda_0, \Lambda_T$  из (2.6),  $\omega_0^e = \omega_0/|\omega_0|$  из (2.7), (5.17), (5.18) и с учетом (5.14), (5.15) находятся неизвестные  $\alpha, \Omega, T, |\omega_0|$ ;

2) по формулам (5.19), (5.20) и  $\Lambda_0, \Lambda_T, \alpha, \Omega, T, |\omega_0|$  находится кватернион  $\mathbf{K}$ ;

3) по формулам  $\omega_0^{\text{выч}} = |\omega_0| \omega_0^e, \omega_T^{\text{выч}} = \tilde{\mathbf{K}} \circ (\mathbf{i}_1 \alpha \sin \Omega T + \mathbf{i}_2 \alpha \cos \Omega T + \mathbf{i}_3 \Omega) \circ \mathbf{K}$  определяются граничные векторы  $\omega_0^{\text{выч}}, \omega_T^{\text{выч}}$ ;

4) вычисленные  $\omega_0^{\text{выч}}, \omega_T^{\text{выч}}$  сравниваются с заданными граничными условиями (2.6).

5) если в п. 4 выполняется равенство, то оптимальное решение задачи находится в классе регулярных конических движений; угловая скорость КА, его траектория, вектор углового ускорения и время быстрогодействия  $T$  вычисляются по формулам (5.4), (5.6), (5.22) и п. 1;

6) сопряженные переменные  $\varphi$  и  $\mathbf{p}$  вычисляются по формулам (5.2).

Полученное в классе регулярных конических движений оптимальное решение задачи и известное ранее [4] точное решение в классе плоских эйлеровых разворотов (при условии  $\omega_0, \omega_T \parallel \text{vect}(\tilde{\Lambda}_0 \circ \Lambda_T)$ ) для частных случаев граничных условий по угловой скорости КА будут использованы как аналитические подтверждения при построении квазиоптимального решения задачи поиска углового ускорения КА в классе обобщенных конических движений. Также приведем наводящие соображения, которые получены на основе численного решения задачи поиска оптимального углового ускорения КА при произвольных граничных условиях.

## 6. Обоснование предлагаемого подхода на основе числовых решений задачи

Численно решается краевая задача принципа максимума, полученная в разделе 3 статьи для исходной кинематической задачи поиска оптимального ускорения КА (2.3), (2.4), (2.6)–(2.8), (3.1):

$$(6.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2\dot{\Lambda} = \Lambda \circ \omega, \\ \dot{\omega} = \varepsilon, \\ \dot{\varphi} = -\mathbf{p}/2, \\ \mathbf{p} = \tilde{\Lambda} \circ \mathbf{c}_v \circ \Lambda, \quad \mathbf{c}_v = \text{const}, \end{array} \right.$$

$$(6.2) \quad \Lambda(0) = \Lambda_0, \quad \omega(0) = \omega_0,$$

$$(6.3) \quad \Lambda(T) = \Lambda_T, \quad \omega(T) = \omega_T,$$

$$(6.4) \quad \varepsilon^{\text{опт}} = \varphi/|\varphi|,$$

$$(6.5) \quad H^{\text{опт}}(T) = (\mathbf{p}, \omega)/2 + (\varphi, \varepsilon)|_{t=T} = 1,$$

откуда необходимо найти  $\varepsilon^{\text{опт}}, T^{\text{опт}}, \Lambda^{\text{опт}}, \omega^{\text{опт}}, \mathbf{c}_v$ .

Условия в конечный момент времени (6.3) целесообразно записать в фазовом пространстве  $\mathbf{\Lambda} \times \boldsymbol{\omega}$  размерности 7 [8, 9, 11]:

$$(6.6) \quad \text{vect} (\mathbf{\Lambda}(T) \circ \tilde{\mathbf{\Lambda}}_T) = 0, \quad \boldsymbol{\omega}(T) = \boldsymbol{\omega}_T.$$

Метод численного решения подобных задач описан в [8, 9, 11]. Также для сравнения приводятся кинематические характеристики по результатам расчетов в полной динамической задаче оптимального разворота КА как твердого тела различных динамических конфигураций [8] в безразмерных переменных при тех же граничных условиях по угловому положению в пространстве и угловой скорости КА:

$$(6.7) \quad \mathbf{\Lambda}_0 = (0,7951, 0,2981, -0,3975, 0,3478), \quad \boldsymbol{\omega}_0 = (0,2739, -0,2388, -0,3),$$

$$(6.8) \quad \mathbf{\Lambda}_T = (0,8443, 0,3984, -0,3260, 0,1485), \quad \boldsymbol{\omega}_T = (0,0, 0,0, -0,59).$$

КА 1. Произвольный КА  $I_1 = 0,9869, I_2 = 1,1843, I_3 = 0,7895$ .

КА 2.  $I_1 = 0,9506, I_2 = 1,3308, I_3 = 0,5704$ .

КА 3. Международная космическая станция (МКС) в своей ранней версии [13]  $I_1 = 4853\,000 \text{ кг} \times \text{м}^2, I_2 = 23\,601\,000 \text{ кг} \times \text{м}^2, I_3 = 26\,278\,000 \text{ кг} \times \text{м}^2$  или безразмерные величины  $I_1 = 0,2358, I_2 = 1,1466, I_3 = 1,2766$ .

КА 4. КА «Спейс Шаттл», у которого характеристики, почти как у динамически-симметричного твердого тела:  $I_1 = 3\,400\,648 \text{ кг} \times \text{м}^2, I_2 = 21\,041\,672 \text{ кг} \times \text{м}^2$  или  $I_1 = 0,1967, I_2 = 1,2168, I_3 \approx I_2$ .

В табл. 1 показаны значения кватерниона ориентации и вектора угловой скорости КА, полученные при решении задачи поиска оптимального углового ускорения (6.1)–(6.6) и при решении динамической задачи оптимального разворота [8] для указанных четырех КА в промежуточных точках  $t_* = 0,4508, t_1 = 0,4504, t_2 = 0,4502, t_3 = 0,4513, t_4 = 0,4515$ , интервалов времени движения  $[0, T^{\text{опт}}], [0, T_k^{\text{опт}}], k = 1, 2, 3, 4$  (время оптимальной переориентации для каждого из случаев  $T^{\text{опт}} = 0,8965, T_1^{\text{опт}} = 0,8858$ ,

**Таблица 1**

КА	$\lambda_0$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$
КА 1 ( $t_1$ )	0,80480	0,36812	-0,37874	0,27082	-0,03497	-0,03416	-0,57245
КА 2 ( $t_2$ )	0,80582	0,36894	-0,37740	0,26853	-0,03943	-0,03158	-0,60068
КА 3 ( $t_3$ )	0,80405	0,36949	-0,38005	0,26935	-0,04073	-0,04253	-0,58311
КА 4 ( $t_4$ )	0,80311	0,37231	-0,37955	0,27171	-0,03412	-0,03576	-0,55873
Значения величин в задаче (6.1)–(6.6) ( $t_*$ )	0,80437	0,36758	-0,37955	0,27171	-0,03412	-0,03576	-0,55873
Значения величин в модиф. задаче	0,80452	0,36763	-0,37817	0,27309	-0,03246	-0,03050	-0,55603

**Таблица 2**

КА	$\lambda_0$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$
КА 3 ( $t_3^0$ )	0,82396	0,35523	-0,36235	0,25220	0,02834	-0,05283	-0,61018
КА 4 ( $t_4^0$ )	0,82698	0,35296	-0,36222	0,24560	0,02813	-0,04666	-0,61162
Значения величин в задаче (6.1)–(6.6) ( $t_*^0$ )	0,83121	0,36278	-0,35560	0,22588	0,02843	-0,04552	-0,60910
Значения величин в модиф. задаче	0,83228	0,36140	-0,35278	0,22855	0,02987	-0,05517	-0,60373

$T_2^{\text{опт}} = 0,8654$ ,  $T_3^{\text{опт}} = 0,8774$ ,  $T_4^{\text{опт}} = 0,8728$ ). При этом промежуточные точки  $t_*$ ,  $t_k$  настолько близки друг к другу, насколько позволяет программа счета с переменным шагом по времени  $t$ , и ориентированы приблизительно на середину наибольшего интервала времени движения  $[0, T^{\text{опт}}]$  кинематической задачи (6.1)–(6.6). Также в последней строке табл. 1 для сравнения приводятся данные, полученные при решении модифицированной задачи поиска углового ускорения КА (в точке  $t = \tau_* = 0,4491$ ), о которой пойдет речь в разделах 7–8 статьи.

В табл. 2 приводятся значения фазовых координат КА, полученные при решении тех же задач для КА 3, 4 в случае, когда разворот происходит из положения покоя в положение покоя

$$(6.9) \quad \omega_0 = \omega_T = (0,0, 0,0, 0,0),$$

а начальное и конечное условия по ориентации КА задаются выражениями (6.7), (6.8); оптимальное время переориентации при этом  $T^{\text{опт}} = 1,3916$ ,  $T_3^{\text{опт}} = 1,5645$ ,  $T_4^{\text{опт}} = 1,5278$ .

Приблизительно близкие друг к другу промежуточные точки  $t_*^0$ :

$$t_*^0 = 0,7809, \quad t_3^0 = 0,7823, \quad t_4^0 = 0,7815.$$

Такие же вычисления проводились и для других граничных условий. Из табл. 1, 2 и других расчетов следует, что в динамической задаче оптимального разворота фазовые координаты КА существенно зависят от его начального и конечного состояний, менее существенно зависят от его конфигурации и достаточно близки к результатам кинематической задачи поиска оптимального углового ускорения КА. Следует отметить, что в задаче оптимального по энергии разворота КА с фиксированным временем [9] указанный эффект более явный, так как отрезок времени движения КА и его средний момент времени одинаковы во всех примерах. Отсюда следует, что кинематическая задача поиска оптимального углового ускорения (6.1)–(6.6), вообще говоря, носит общий характер для КА произвольных конфигураций. При этом выражения для кватерниона ориентации и угловой скорости ки-

нематической задачи можно построить аналитически в явном виде на основе решения модифицированной задачи оптимальной переориентации КА в классе обобщенных конических движений, а управляющее угловое ускорение определить посредством дифференцирования вектора угловой скорости. Изложим это более подробно.

## 7. Модифицированная задача поиска оптимального углового ускорения КА

Общее решение фундаментальной задачи определения ориентации твердого тела по его известной угловой скорости (2.1), (2.3), называемой задачей Дарбу, не известно. Поэтому получим решение задачи в классе обобщенных конических движений, для этого определим вектор угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}(t)$  как

$$(7.1) \quad \boldsymbol{\omega}(t) = \mathbf{i}_1 \dot{f}(t) \sin g(t) + \mathbf{i}_2 \dot{f}(t) \cos g(t) + \mathbf{i}_3 \dot{g}(t),$$

где функции  $f(t)$  и  $g(t)$  (параметры обобщенного конического движения) произвольны. В этом случае уравнение (2.3) имеет точное решение [8, 9], удовлетворяющее начальному условию (2.5):

$$(7.2) \quad \begin{aligned} \Lambda(t) = \Lambda_0 \circ \exp\{-\mathbf{i}_3 g(0)/2\} \circ \exp\{-\mathbf{i}_2 f(0)/2\} \circ \\ \circ \exp\{\mathbf{i}_2 f(t)/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_3 g(t)/2\}. \end{aligned}$$

Как видно, выражения (7.1), (7.2) включают в себя выражения для угловой скорости и траектории КА в точных решениях задачи поиска оптимального углового ускорения КА, когда вектор его угловой скорости сохраняет постоянное направление на всем интервале времени движения КА [4] или совершает регулярную прецессию (раздел 5 статьи). Следует отметить, что с помощью взаимно однозначных замен переменных (описано в [8, 9]) задачу Дарбу в общем случае можно свести к решению уравнения типа (2.3), где угловая скорость как (7.1), но противоположна по направлению

$$\boldsymbol{\omega}^*(t) = -\boldsymbol{\omega}(t)$$

и находится в классе подобных движений (кватернионное дифференциальное уравнение (2.3) с угловой скоростью  $\boldsymbol{\omega}^*(t)$  по-прежнему не имеет явного решения). Таким образом, вид вектора угловой скорости типа (7.1) соответствует классической концепции Пуансо об угловом движении твердого тела как обобщенном коническом движении [7].

Вводя в формулы (7.1), (7.2) произвольный постоянный кватернион  $\mathbf{K}$ ,  $\|\mathbf{K}\| = 1$ , дополнительно обобщим их:

$$(7.3) \quad \boldsymbol{\omega} = \tilde{\mathbf{K}} \circ (\mathbf{i}_1 \dot{f}(t) \sin g(t) + \mathbf{i}_2 \dot{f}(t) \cos g(t) + \mathbf{i}_3 \dot{g}(t)) \circ \mathbf{K},$$

$$(7.4) \quad \begin{aligned} \Lambda = \Lambda_0 \circ \tilde{\mathbf{K}} \circ \exp\{-\mathbf{i}_3 g(0)/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_2 (f(t) - f(0))/2\} \circ \\ \circ \exp\{\mathbf{i}_3 g(t)/2\} \circ \mathbf{K}. \end{aligned}$$

Пусть вторые производные от функций  $f$  и  $g$  рассматриваются как управления. Вводя обозначения

$$(7.5) \quad \dot{f} = f_1, \quad \dot{g} = g_1,$$

составим управляемую систему:

$$(7.6) \quad \dot{f} = f_1, \quad \dot{g} = g_1, \quad \dot{f}_1 = u_1, \quad \dot{g}_1 = u_2,$$

где  $f, f_1, g, g_1$  есть фазовые координаты этой задачи, а  $u_1, u_2$  – управления. Кватернион  $\mathbf{K}$  зададим так:

$$(7.7) \quad \mathbf{K} = \mathbf{K}_2 \circ \mathbf{K}_1, \quad \mathbf{K}_1 = \exp\{\mathbf{i}_1 \alpha_1 / 2\}, \quad \mathbf{K}_2 = \exp\{\mathbf{i}_2 \alpha_2 / 2\},$$

где  $\alpha_1, \alpha_2$  – произвольные константы. Следует отметить, кватернионы  $\mathbf{K}_1$  и  $\mathbf{K}_2$  поворачивают вектор угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}$  (7.1) вокруг осей  $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2$ . За счет аддитивной постоянной, входящей в функцию  $g(t)$ , поворот вокруг оси  $\mathbf{i}_3$  уже учтен в выражениях (7.1), (7.3). Сопряжение кватерниона выглядит так:

$$(7.8) \quad \tilde{\mathbf{K}} = \tilde{\mathbf{K}}_1 \circ \tilde{\mathbf{K}}_2, \quad \tilde{\mathbf{K}}_1 = \exp\{-\mathbf{i}_1 \alpha_1 / 2\}, \quad \tilde{\mathbf{K}}_2 = \exp\{-\mathbf{i}_2 \alpha_2 / 2\}.$$

Удовлетворение краевым условиям (2.6), (2.7) функций  $\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\Lambda}$  (7.3), (7.4) с учетом (7.7), (7.8) запишется так:

$$(7.9) \quad \tilde{\mathbf{K}}_1 \circ \tilde{\mathbf{K}}_2 \circ (\mathbf{i}_1 f_1(0) \sin g(0) + \mathbf{i}_2 f_1(0) \cos g(0) + \mathbf{i}_3 g_1(0)) \circ \mathbf{K}_2 \circ \mathbf{K}_1 = \boldsymbol{\omega}_0,$$

$$(7.10) \quad \tilde{\mathbf{K}}_1 \circ \tilde{\mathbf{K}}_2 \circ (\mathbf{i}_1 f_1(T) \sin g(T) + \mathbf{i}_2 f_1(T) \cos g(T) + \mathbf{i}_3 g_1(T)) \circ \mathbf{K}_2 \circ \mathbf{K}_1 = \boldsymbol{\omega}_T,$$

$$(7.11) \quad \boldsymbol{\Lambda}_0 \circ \tilde{\mathbf{K}}_1 \circ \tilde{\mathbf{K}}_2 \circ \exp\{-\mathbf{i}_3 g(0) / 2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_2 (f(T) - f(0)) / 2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_3 g(T) / 2\} \circ \mathbf{K}_2 \circ \mathbf{K}_1 = \boldsymbol{\Lambda}_T.$$

Из уравнения (2.4) путем дифференцирования определяется управляющее угловое ускорение КА, соответствующее решению модифицированной задачи; с учетом формул (7.1), (7.5), (7.6) получим:

$$(7.12) \quad \dot{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\varepsilon} = \tilde{\mathbf{K}} \circ (\mathbf{i}_1 (u_1 \sin g + f_1 g_1 \cos g) + \mathbf{i}_2 (u_1 \cos g - f_1 g_1 \sin g) + \mathbf{i}_3 u_2) \circ \mathbf{K}.$$

С учетом (7.5), (7.7), (7.8) компоненты векторов  $\boldsymbol{\omega}$  и  $\boldsymbol{\varepsilon}$  из (7.3), (7.12) имеют явный вид:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= f_1 \sin g \cos \alpha_2 - g_1 \sin \alpha_2, \\ \omega_2 &= f_1 (\sin g \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 - \cos g \cos \alpha_1) + g_1 \sin \alpha_1 \cos \alpha_2, \\ \omega_3 &= f_1 (\sin g \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 - \cos g \sin \alpha_1) + g_1 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2, \\ \varepsilon_1 &= u_1 (\sin g + f_1 g_1 \cos g) \cos \alpha_2 - u_2 \sin \alpha_2, \\ \varepsilon_2 &= u_1 (\sin g \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 + \cos g \cos \alpha_1) + \\ &\quad + f_1 g_1 (\cos g \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 - \sin g \cos \alpha_1) + u_2 \sin \alpha_1 \cos \alpha_2, \\ \varepsilon_3 &= u_1 (\sin g \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 - \cos g \sin \alpha_1) + \\ &\quad + f_1 g_1 (\cos g \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 + \sin g \sin \alpha_1) + u_2 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2. \end{aligned}$$

Ограничение на модуль вектора углового ускорения КА из (3.1), (7.12):

$$(7.13) \quad |\varepsilon| = |u_1^2 + f_1^2 g_1^2 + u_2^2| \leq 1.$$

Для выполнения условия (7.13) на управления  $u_1, u_2$  наложим ограничение

$$(7.14) \quad \sqrt{u_1^2 + u_2^2} \leq u_*,$$

где константа  $u_*$  ( $0 < u_* < 1$ ) задается исходя из выполнения условия (7.13).

Оптимизационная задача для управляемой системы (7.6) выглядит так: найти оптимальные управления  $u_1(t), u_2(t)$ , переводящие систему (7.6) из состояния

$$(7.15) \quad f = f(0), \quad f_1 = f_1(0), \quad g = g(0), \quad g_1 = g_1(0)$$

в состояние

$$(7.16) \quad f = f(T), \quad f_1 = f_1(T), \quad g = g(T), \quad g_1 = g_1(T),$$

которые удовлетворяют соотношениям (7.9)–(7.11), где параметры  $\alpha_1, \alpha_2$  подлежат определению, и исполняют критерий оптимальности

$$(7.17) \quad J = T \longrightarrow \min.$$

Выражения (7.9)–(7.11) запишем так:

$$(7.18) \quad (\mathbf{i}_1 f_1(0) \sin g(0) + \mathbf{i}_2 f_1(0) \cos g(0) + \mathbf{i}_3 g_1(0)) = \mathbf{K}_2 \circ \mathbf{K}_1 \circ \boldsymbol{\omega}_0 \circ \tilde{\mathbf{K}}_1 \circ \tilde{\mathbf{K}}_2,$$

$$(7.19) \quad (\mathbf{i}_1 f_1(T) \sin g(T) + \mathbf{i}_2 f_1(T) \cos g(T) + \mathbf{i}_3 g_1(T)) = \mathbf{K}_2 \circ \mathbf{K}_1 \boldsymbol{\omega}_T \circ \tilde{\mathbf{K}}_1 \circ \tilde{\mathbf{K}}_2,$$

$$(7.20) \quad \exp\{-\mathbf{i}_3 g(0)/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_2 (f(T) - f(0))/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_3 g(T)/2\} = \\ = \mathbf{K}_2 \circ \mathbf{K}_1 \circ \tilde{\boldsymbol{\Lambda}}_0 \circ \boldsymbol{\Lambda}_T \circ \tilde{\mathbf{K}}_1 \circ \tilde{\mathbf{K}}_2.$$

Поставленную задачу назовем модифицированной задачей поиска оптимального углового ускорения КА, ее точное решение допустимо как приближенное или квазиоптимальное решение классической оптимальной задачи (2.3)–(2.8), (3.1) ((6.1)–(6.6)).

## 8. Решение модифицированной задачи поиска углового ускорения КА

Функция Гамильтона–Понтрягина задачи (7.6):

$$(8.1) \quad H = -1 + \psi_1 f_1 + \psi_2 g_1 + \psi_3 u_1 + \psi_4 u_2,$$

где сопряженные переменные удовлетворяют дифференциальной системе

$$(8.2) \quad \dot{\psi}_1 = 0, \quad \dot{\psi}_2 = 0, \quad \dot{\psi}_3 = -\psi_1, \quad \dot{\psi}_4 = -\psi_2.$$

Общее решение системы (8.2) имеет вид

$$(8.3) \quad \psi_1 = c_1, \quad \psi_2 = c_2, \quad \psi_3 = -c_1 t + c_3, \quad \psi_4 = -c_2 t + c_4,$$

где  $c_1, \dots, c_4$  – произвольные постоянные.

Условие максимума функции Гамильтона–Понтрягина (8.1) на ограниченном и замкнутом множестве (7.14) дает выражения для оптимальных управлений:

$$(8.4) \quad \begin{aligned} u_1 &= u_*(-c_1 t + c_3) / \sqrt{(-c_1 t + c_3)^2 + (-c_2 t + c_4)^2}, \\ u_2 &= u_*(-c_2 t + c_4) / \sqrt{(-c_1 t + c_3)^2 + (-c_2 t + c_4)^2}. \end{aligned}$$

Подставляя формулы (8.4) в уравнения (7.6), находим их общее решение, которое содержит 8 неопределенных констант  $c_1, \dots, c_8$ :

$$(8.5) \quad \begin{aligned} f &= -c_1 u_* \{t/2 - A/2 - B c_2 / c_1\} F(t) + \\ &\quad + B [B/2 + (t - A) c_2 / c_1] \ln(t - A + F(t)) / C + c_5 t + c_6, \\ g &= -c_2 u_* \{t/2 - A/2 - B c_1 / c_2\} F(t) + \\ &\quad + B [-B/2 + (t - A) c_1 / c_2] \ln(t - A + F(t)) / C + c_7 t + c_8, \\ f_1 &= -c_1 u_* [F(t) + B \ln(t - A + F(t)) c_2 / c_1] / C + c_5, \\ g_1 &= -c_2 u_* [F(t) + B \ln(t - A + F(t)) c_1 / c_2] / C + c_7, \\ A &= (c_1 c_3 + c_2 c_4) / C^2, \quad B = (c_1 c_4 - c_2 c_3) / C^2, \quad C = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}, \\ F(t) &= \sqrt{(t - A)^2 + B^2}. \end{aligned}$$

Исходя из формулы (7.4), в выражении для функции  $f$  (8.5) положим константу  $c_6$  равной 0. Для определения девяти неизвестных постоянных задачи  $c_1, \dots, c_5, c_7, c_8$  и  $\alpha_1, \alpha_2$  и времени  $T$  служат девять уравнений системы (7.18)–(7.20) (из-за требования  $\|\mathbf{\Lambda}\| = 1$  три скалярных уравнения независимы в кватернионной записи (7.20)) и условие равенства 0 в конечный момент времени функции Гамильтона–Понтрягина (8.1). На основе (7.3), (7.4), (8.5) получим явные зависимости, определяющие законы изменения угловой скорости и траектории КА в задаче поиска оптимального по быстродействию углового ускорения КА в классе обобщенных конических движений. Формула (7.12) с учетом (8.4), (8.5) даст аналитическое выражение для вектора углового ускорения  $\varepsilon$ . Модифицированная задача поиска оптимального углового ускорения КА полностью решена.

Управления  $u_1, u_2$  и фазовые координаты  $f, f_1, g, g_1$ , заданные (8.4), (8.5), если  $c_1 c_4 - c_2 c_3 \neq 0$ , соответствуют непрерывным управлениям  $u_1, u_2$  и по формуле (7.12) непрерывному управляющему угловому ускорению  $\varepsilon$ . В случаях  $c_1 c_4 - c_2 c_3 = 0$  допустимы разрывы первого рода функций управления  $u_1, u_2$  и углового ускорения  $\varepsilon$ , при этом постоянные  $c_1, c_2, c_3, c_4$  подчинены условию

$$(8.6) \quad c_3 / c_1 = c_4 / c_2 = t_*.$$

В этих случаях функции управлений (8.4) принимают кусочно-постоянный вид

$$(8.7) \quad u_1 = -c_1 u_* \text{sign}(t - t_*)/C, \quad u_2 = -c_2 u_* \text{sign}(t - t_*)/C.$$

Если  $t_* \in [0, T]$ , то по (8.7) имеем двухэтапное управление с постоянными участками или, в противном случае, одноэтапное постоянное управление. На основе (7.6) и (8.7) получим выражения для фазовых координат в виде полиномов 1-й и 2-й степени  $t$ :

$$(8.8) \quad \begin{aligned} f &= -c_1 u_* (t - t_*)^2 \text{sign}(t - t_*)/2C + c_5 (t - t_*) + c_6, \\ g &= -c_2 u_* (t - t_*)^2 \text{sign}(t - t_*)/2C + c_7 (t - t_*) + c_8, \\ f_1 &= -c_1 u_* (t - t_*)^2 \text{sign}(t - t_*)/2C + c_5 = c_1 u_* |t - t_*|/C + c_5, \\ g_1 &= -c_2 u_* (t - t_*)^2 \text{sign}(t - t_*)/2C + c_7 = c_2 u_* |t - t_*|/C + c_7, \end{aligned}$$

где  $f, f_1, g, g_1$  непрерывны в точке разрыва управлений  $t = t_*$ .

Следует отметить, что  $c_6 = 0$ , а  $c_1 = \pm 1$  ((8.7), (8.8) допустимо переформулировать, когда  $c_2, c_3, c_4$  фигурируют как отношения к  $c_1$ ); тогда, выражения (8.7), (8.8) будут содержать 5 произвольных констант  $c_2, c_5, c_7, c_8, t_*$ . Для определения их и неизвестных величин  $T, \alpha_1, \alpha_2$  служат девять скалярных уравнений (7.18)–(7.20). Из этих выражений следует, что решения задачи с кусочно-постоянными управлениями  $u_1, u_2$  возникают при определенной взаимосвязи между заданными величинами граничных условий задачи (2.6), (2.7). При варьировании величин  $c_2, c_5, c_7, c_8, T, \alpha_1, \alpha_2$  из уравнений (7.18)–(7.20) получается множество значений  $\omega_0, \Lambda_T, \omega_T$ , при которых решение задачи поиска оптимального углового ускорения КА будет получено при разрыве управлений  $u_1, u_2$  и, следовательно, при разрыве углового ускорения  $\varepsilon$ .

Если в задаче поиска оптимального по быстродействию углового ускорения КА векторы граничных условий по угловой скорости  $\omega_0$  и  $\omega_T$  коллинеарны вектору  $\text{vect}(\mathbf{\Lambda}_0 \circ \mathbf{\Lambda}_T)$  (случай плоского эйлерового поворота КА [4]), то решения исходной и модифицированной задач совпадут. Это же справедливо, когда решение исходной задачи найдено в классе регулярных конических движений (раздел 5 статьи). При этом в (7.13)  $f_1^2 g_1^2 = 0$ , а модуль вектора углового ускорения КА в модифицированной задаче равен величине ограничения и, следовательно, постоянен.

В задаче поиска оптимального по быстродействию углового ускорения КА из (4.9) модуль вектора углового ускорения равен  $|\varepsilon| \equiv 1$ ; в модифицированной задаче из (8.4) следует  $\sqrt{u_1^2 + u_2^2} = u_*$ , где  $u_*$  определяется из условия, чтобы вычисленное угловое ускорение удовлетворяло условию  $|\varepsilon| \leq 1$ . Угловое ускорение, полученное при решении модифицированной задачи, может не выполнять условие  $|\varepsilon| \equiv 1$ . В связи с этим время быстродействия в модифицированной задаче может немного отличаться от времени быстродействия классической задачи.



Запишем алгоритм решения задачи поиска минимального по времени углового ускорения КА при произвольных заданных краевых условиях.

1. По имеющимся краевым условиям  $\Lambda_0, \Lambda_T$  (2.6),  $\omega_0, \omega_T$  (2.7) по формулам (7.7), (7.8), девяти скалярным уравнениям из (7.18)–(7.20) и равенству  $H(T) = 0$  (8.1), принимая во внимание (8.3)–(8.5), находятся девять произвольных констант  $c_1, \dots, c_5, c_7, c_8$  и  $\alpha_1, \alpha_2$  время  $T$  и определяются  $f(t), f_1(t), g(t), g_1(t)$ .

2. Вычисляется кватернион  $\mathbf{K}$  по формуле (7.7).

3. Закон изменения угловой скорости КА по (7.3):

$$\omega = \tilde{\mathbf{K}} \circ (\mathbf{i}_1 \dot{f}(t) \sin g(t) + \mathbf{i}_2 \dot{f}(t) \cos g(t) + \mathbf{i}_3 \dot{g}(t)) \circ \mathbf{K}.$$

4. Закон изменения траектории углового движения КА по (7.4):

$$\Lambda = \Lambda_0 \circ \tilde{\mathbf{K}} \circ \exp\{-\mathbf{i}_3 g(0)/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_2 (f(t) - f(0))/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_3 g(t)/2\} \circ \mathbf{K}.$$

5. Вектор углового ускорения КА строится по формуле (7.12).

## 9. Числовые примеры

Сравниваются результаты численного решения исходной (классической) задачи поиска оптимального углового ускорения КА и квазиоптимального решения этой задачи по аналитическому алгоритму раздела 8 статьи. Величины  $\alpha_1, \alpha_2, c_1, \dots, c_5, c_7, c_8, u_*$  в квазиоптимальном решении задачи при развороте КА с граничными условиями (6.7), (6.8):

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -0,04218, \quad \alpha_2 = -0,22280, \quad c_1 = 1,0, \quad c_2 = -1,03798, \\ c_3 &= 0,67161 \quad c_4 = -0,70520, \quad c_5 = -0,01875, \\ c_7 &= -0,73653, \quad c_8 = -0,73932, \quad u_* = 0,99450. \end{aligned}$$

Величины квазиоптимального и оптимального времени быстрогодействия таковы:  $T^{\text{квазиопт}} = 0,8982, T^{\text{опт}} = 0,8965$  (разд. 6); разность  $\Delta T = T^{\text{квазиопт}} - T^{\text{опт}} = 0,0017$ , относительная погрешность  $(\Delta T/T^{\text{опт}}) \times 100\% = 0,19\%$ . На рис. 1, 2 приведены графики изменения в зависимости от  $t$  проекций вектора угловой скорости КА  $\omega_i(t)$ , компонент кватерниона поворота КА  $\Lambda_i(t)$  и проекций вектора углового ускорения КА  $\varepsilon_i(t)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , которые для двух задач достаточно похожи. В табл. 3 приводятся значения проекций вектора углового ускорения КА  $\varepsilon(t)$  при решении классической ( $\varepsilon^{\text{опт}}$ ) и модифицированной ( $\varepsilon^{\text{квазиопт}}$ ) задач на концах и в промежуточных точках  $t_* = 0,4508, \tau_* = 0,4491$  интервалов времени движения КА в этих двух решениях.

**Таблица 3**

$t$	$\varepsilon_1^{\text{опт}}$	$\varepsilon_2^{\text{опт}}$	$\varepsilon_3^{\text{опт}}$	$t$	$\varepsilon_1^{\text{квазиопт}}$	$\varepsilon_2^{\text{квазиопт}}$	$\varepsilon_3^{\text{квазиопт}}$
0	-0,65603	0,48884	-0,57503	0	-0,63762	0,51267	-0,57285
$t_*$	-0,70530	0,41389	-0,57554	$\tau_*$	-0,72143	0,38795	-0,56710
$T^{\text{опт}}$	0,78625	-0,29616	0,54230	$T^{\text{квазиопт}}$	0,84240	-0,07923	0,52813

$T = 0,8965$

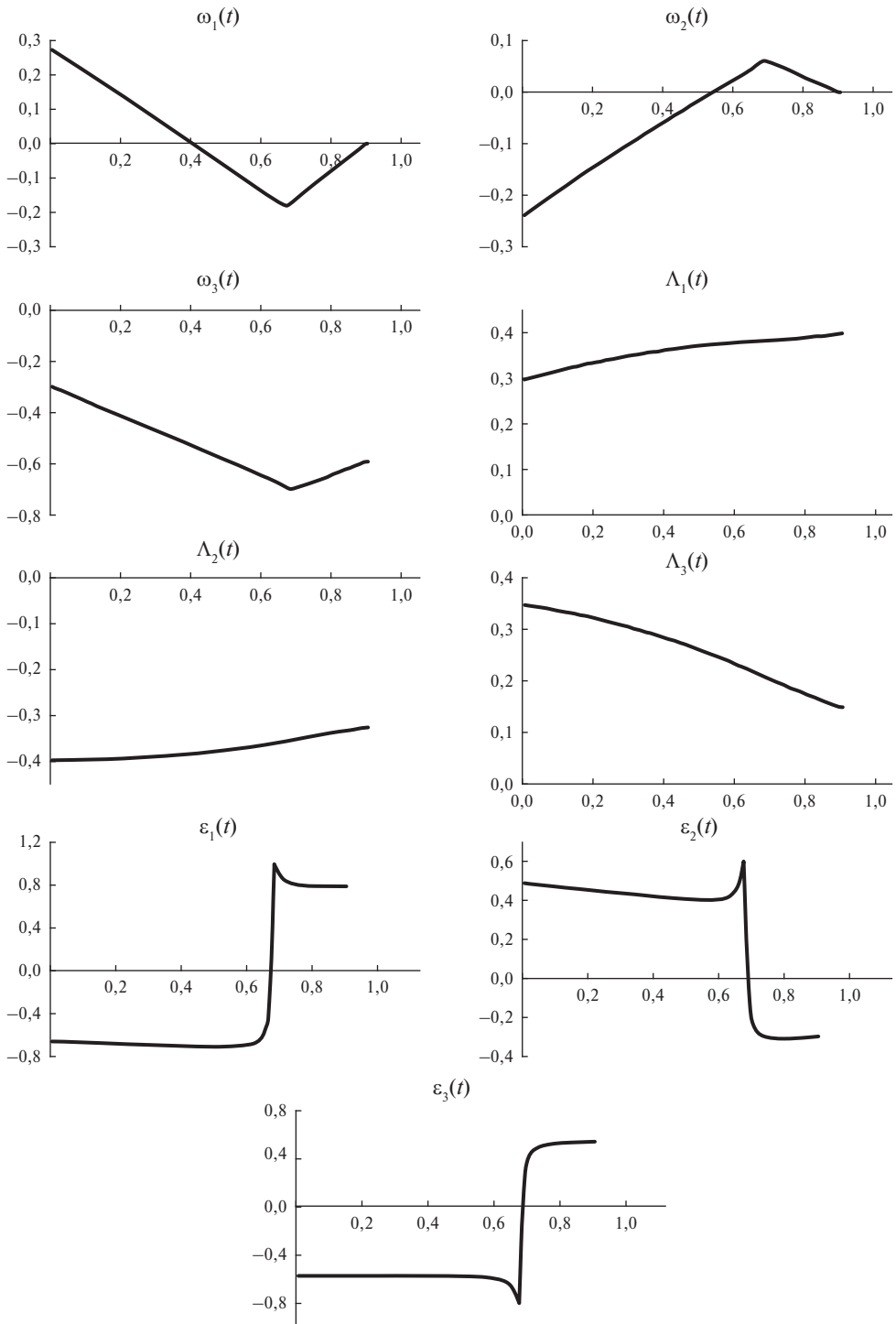


Рис. 1. Результаты решения классической задачи при произвольных граничных условиях.

$T = 0,8982$

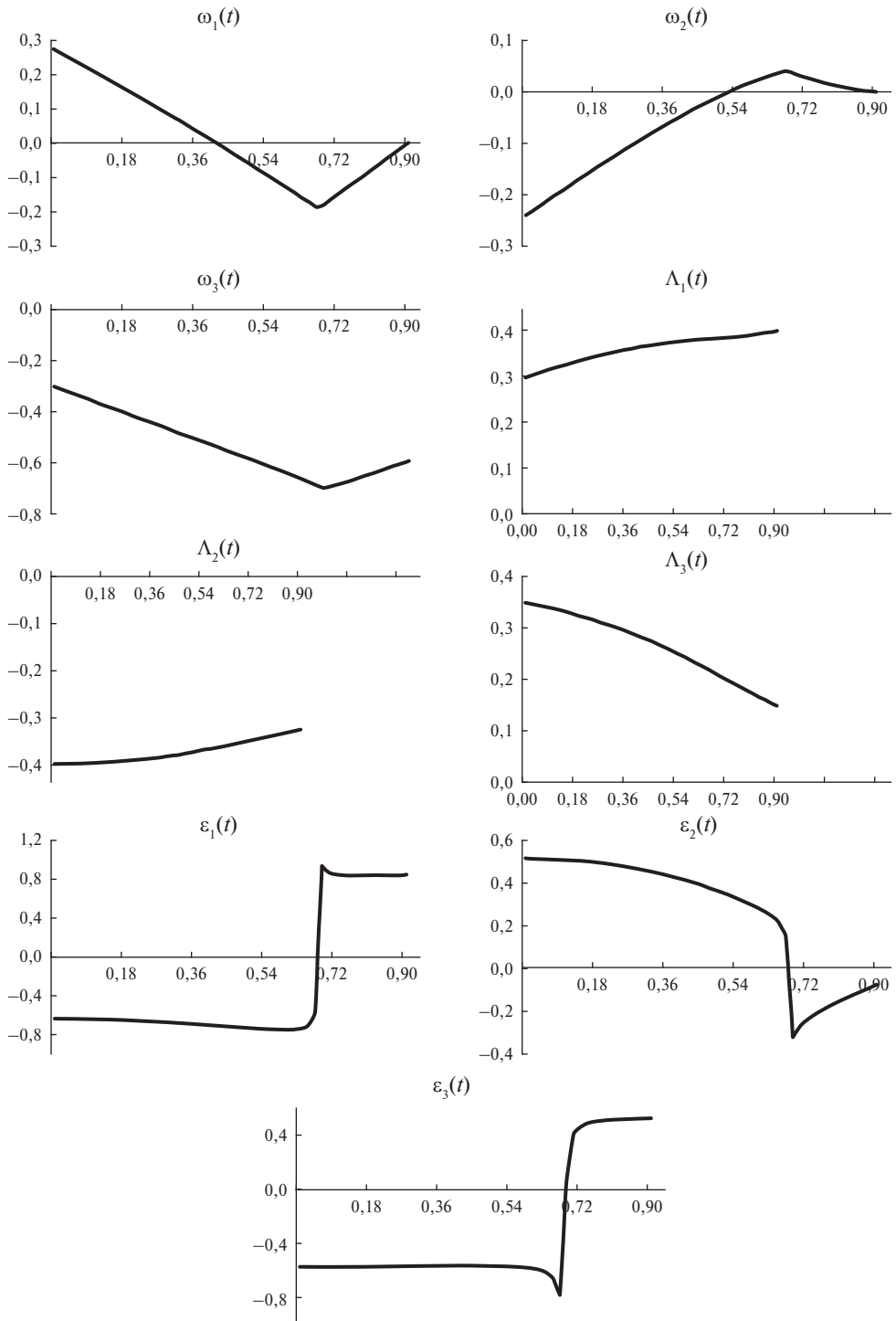


Рис. 2. Результаты решения модифицированной задачи при произвольных граничных условиях.

$T = 1,2967$

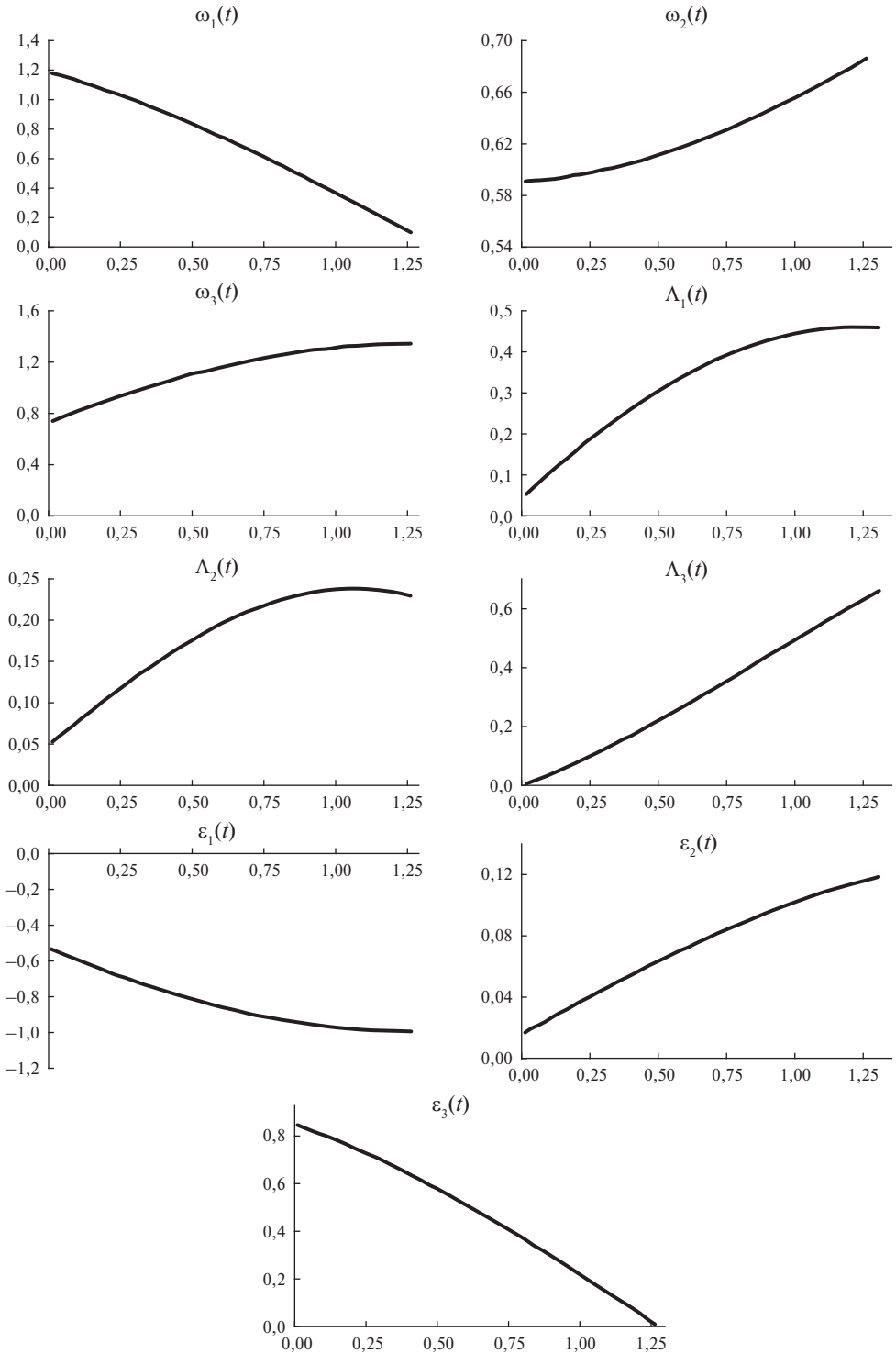


Рис. 3. Результаты решения классической задачи в случае регулярного конического движения.

Из расчетов для различных краевых условий следует близость решений классической и модифицированной задач поиска углового ускорения КА, что позволяет рассматривать решение модифицированной задачи как квазиоптимальное решение классической задачи поиска оптимального углового ускорения КА.

Также для примера показаны результаты решения кинематической задачи поиска оптимального углового ускорения КА в классе регулярных конических движений по аналитическому алгоритму раздела 5. На рис. 3 приводятся графики проекций переменных  $\omega(t)$ ,  $\Lambda(t)$ ,  $\varepsilon(t)$  для величин граничных условий  $\Lambda_0 = (0,9975, 0,0504, 0,0504, 0)$ ,  $\Lambda_T = (0,5495, 0,4582, 0,2291, 0,6598)$ ,  $\omega_0 = (1,1811, 0,5906, 0,7382)$ ,  $\omega_T = (0,0093, 0,6860, 1,3447)$ , которые удовлетворяют требованиям раздела 5. В первую очередь, при решении исходя из (5.17)–(5.20) определялись постоянные  $\alpha_1$ ,  $\Omega$ ,  $T$ ,  $|\omega_0|$ ,  $K_0$ ,  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$  ( $\alpha_1 = 1,3041$ ,  $\Omega = -0,7668$ ,  $T = 1,2967$ ,  $|\omega_0| = 1,5129$ ,  $K_0 = 0,5810$ ,  $K_1 = -0,6561$ ,  $K_2 = -0,3122$ ,  $K_3 = 0,3669$ ), потом из (5.4), (5.22), (5.6) строились векторы  $\omega$ ,  $\varepsilon$  и кватернион  $\Lambda$ .

## 10. Заключение

Аналитический квазиоптимальный алгоритм решения кинематической задачи поиска программного оптимального углового ускорения КА при произвольных краевых условиях достаточно теоретически обоснован и с допустимой точностью решает оптимальную кинематическую задачу определения углового ускорения КА. Предложенный алгоритм не требует численного решения краевой задачи принципа максимума или иного сложного численного решения и являет собой готовые аналитические законы квазиоптимального программного управления и изменения программной траектории, которые могут быть установлены на борт КА. В связи с этим полученные результаты могут быть применены для КА нанокласса, которые имеют ограничения на вычислительные мощности. Кроме этого, на основе полученных результатов с использованием принципа перенесения Котельникова–Штуди [12], позволяющего распространить кватернионные формулы, описывающие управление угловым движением, на бикватернионные формулы, описывающие управление общим пространственным движением твердого тела, может быть получен аналитический квазиоптимальный по быстродействию алгоритм программного управления пространственным движением (маневрированием) КА.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Scrivener S.L., Thompson R.C.* Survey of Time-Optimal Attitude Maneuvers // *J. Guidance, Control Dynam.* 1994. V. 17. No. 2. P. 225–233.
2. *Junkins J.L., Turner J.D.* Optimal Spacecraft Rotational Maneuvers. N.Y.: Elsevier, 1986.
3. *Crassidis J.L., Markley F.L.* Fundamentals of Spacecraft Attitude Determination and Control. N.Y.: Springer, 2014.

4. *Бранец В.Н., Шмыглевский И.П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973.
5. *Сомов Е.И., Бутырин С.А., Сомова Т.Е.* Автономное наведение и управление миниспутниками в низкоорбитальной группировке при площадной сканирующей съемке // Сб. тр. XXX Юбил. С.-Петербург. междунар. конф. по интегрир. навигац. сист. СПб.: ЦНИИ «Электроприбор», 2023.
6. *Иванова Е.А.* Об одном подходе к решению задачи Дарбу // Изв. РАН. МТТ. 2000. № 1. С. 45–52.
7. *Molodenkov A.V., Perehlyayev S.E.* Solution of Approximate Equation for Modified Rodrigues Vector and Attitude Algorithm Design // J. Guidance, Control Dynam. 2021. V. 44. No. 6. P. 1224–1227.
8. *Молоденков А.В., Сапунков Я.Г.* Аналитическое квазиоптимальное решение задачи минимального по времени поворота космического аппарата // Изв. РАН. ТиСУ. 2021. № 4. С. 142–156.
9. *Sapunkov Ya.G., Molodenkov A.V.* Quasioptimal Spacecraft Attitude Control Constructed According to the Poinot Concept // Aerospace. 2023. V. 10. No. 5. P. 402–417.
10. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1961.
11. *Молоденков А.В., Сапунков Я.Г.* Особый режим управления в задаче оптимального разворота сферически-симметричного космического аппарата // Изв. РАН. ТиСУ. 2009. № 6. С. 47–54.
12. *Челмоков Ю.Н.* Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твердого тела и их приложения. М.: Физматлит, 2006.
13. *Банит Ю.Р., Беляев М.Ю., Добринская Т.А. и др.* Определение тензора инерции международной космической станции по телеметрической информации // Препринт № 57. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2002.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Галеевым.*

Поступила в редакцию 14.03.2024

После доработки 28.11.2024

Принята к публикации 02.12.2024